

7. O Ensino-aprendizagem da Álgebra na Teoria da Objetivação

Luis Radford

Introdução

HÁ ALGUM TEMPO tem sido feitos esforços para introduzir alguns elementos de álgebra no ensino fundamental. Enquanto anteriormente aprender aritmética era apresentada como um pré-requisito para aprender álgebra, esta posição curricular tem sido questionada pelo movimento de “*Early Algebra*”¹. Ao mesmo tempo, surgiram novas questões. Por exemplo, se a aprendizagem da aritmética não é um pré-requisito para aprender álgebra, por onde começamos? Qual é a relação entre pensamento aritmético e pensamento algébrico?

Na primeira parte do capítulo, discuto brevemente a questão do pensamento algébrico e esboço alguns dos resultados que alcançamos em nossa pesquisa sobre a generalização das sequências. A segunda parte gira em torno do ensino-aprendizagem das equações. Os episódios que discuto nesta segunda parte nos permitem mostrar o caminho que temos seguido no ensino-aprendizagem das equações nos anos iniciais. Os episódios ilustram, ao mesmo tempo, o que entendemos na teoria da objetivação por aprendizagem como um *encontro coletivo* com a matemática.

¹Nota da tradutora: Segundo Kieran (2016, p.1), “Early Algebra” refere-se, no contexto internacional, ao movimento de pesquisa que busca compreender “tanto a natureza do pensamento algébrico como as formas que este pensamento pode ser desenvolvido” em crianças entre 6 e 12 anos. Em espanhol, o termo equivalente é “álgebra temprana”. Na tradução, optamos por manter “álgebra inicial” compreendendo que se refere, no contexto nacional, ao recorte dos anos iniciais do ensino fundamental.

A natureza do pensamento algébrico

Tentar entender a natureza do pensamento algébrico pressupõe uma posição epistemológica. Dada a orientação histórico-cultural da teoria da objetivação, não é surpreendente que nossa posição epistemológica seja de natureza histórica. Entretanto, não se trata de recorrer à história para descrever formalmente as etapas do desenvolvimento do pensamento algébrico. Se trata de ver o pensamento algébrico em seu movimento contextual, como resposta a problemas que surgiram dentro das atividades socioculturais e concretas, onde ele surgiu e se desenvolveu. Agora, como podemos distinguir o pensamento algébrico de outros tipos de pensamento matemático? Como podemos definir aquilo que o *caracteriza* e que seria exatamente o que deveríamos buscar em seu movimento histórico? Não há uma resposta única para esta pergunta. Por exemplo, em sua proposta curricular, Vasily V. Davydov elaborou uma resposta muito diferente da nossa. No contexto de um projeto mais amplo de reestruturação do currículo da União Soviética, inspirado na visão da matemática de seu tempo, a matemática moderna, Davydov procurou organizar o ensino em torno dos “conceitos de ‘relação e estrutura’” (1975a, p.101), orientando-a para o desenvolvimento do que na época era considerado o auge da cognição humana: o pensamento teórico (RADFORD, 2021a). Ele seguiu o conselho do matemático Bourbakista Jean Dieudonné, que dizia que “é preciso mostrar abertamente à criança a essência abstrata da álgebra e desenvolver sua capacidade de abstração e poder teórico” (apud DAVYDOV, 1975a, p. 109); ele também seguiu os passos de A. N. Kolmogorov, que afirmou que “toda a estrutura da álgebra escolar e toda a análise matemática pode ser erguida sobre o conceito de número real” (apud DAVYDOV, 1975b, p. 110). Assim Davydov concluiu que “A passagem dos números inteiros para os números reais é uma passagem da aritmética para a ‘álgebra’” (1975b, p. 113). É assim que a resposta de Davydov gira em torno do conceito de grandeza (PANNOSSIAN; SOUSA; MOURA, 2016) e que ele viu na passagem da fração para o número real a passagem da aritmética para a álge-

bra. Assim, como nos lembra Ivashova, no programa educacional de Davydov: “Foi dada primazia ao estudo das grandezas que, através da comparação e da medição prática, deram origem ao número; [seu programa] fez uso de uma notação generalizada para descrever as relações das grandezas” (IVASHOVA, 2011, p. 59).

Embora o caminho explorado por Davydov seja sem dúvida interessante, nossa resposta à pergunta sobre o que caracteriza o pensamento algébrico vai por outro caminho. Na perspectiva da teoria da objetivação, a característica do pensamento algébrico não se encontra apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do *objeto* sobre o qual se raciocina), mas também no tipo de *raciocínio* que é feito com grandezas. Mais precisamente, em nossa perspectiva, três condições caracterizariam o pensamento algébrico: a primeira tem a ver com os *objetos* do raciocínio; a segunda com a forma como os objetos são *simbolizados* (se trata, então, de um problema semiótico) e a terceira sobre como se *raciocina* sobre objetos do raciocínio. Vejamos estas condições com mais detalhes:

- (1) *Indeterminação de grandezas*: o problema sobre o qual se raciocina implica grandezas não conhecidas ou não determinadas. Estes podem ser incógnitas, variáveis, parâmetros etc.
- (2) *Denotação*: as grandezas indeterminadas envolvidas no problema têm de ser nomeadas ou simbolizadas. Agora, esta simbolização pode ser realizada de várias maneiras. Signos alfanuméricos podem ser usados, mas não necessariamente. A denotação de quantidades indeterminadas também pode ser simbolizada por meio de linguagem natural, gestos, signos não convencionais, ou mesmo uma mistura deles.
- (3) *Analiticidade*: o raciocínio
 - (α) inclui as grandezas determinadas e indeterminadas
 - (β) opera dedutivamente

O fato de que ao pensar algebricamente o estudante inclui em seu raciocínio tantas grandezas determinadas e indeterminadas

significa que ele estabelece *relações* entre estes dois tipos de grandezas. Isso também significa que ele trata grandezas desconhecidas como se fossem conhecidas. Ou seja, embora não as conheça, opera com elas como se as conhecesse, por exemplo, adiciona-as, subtrai-as, multiplica-as, divide-as com outras grandezas. Esta operação requer uma reconceitualização das *operações* envolvidas. Assim, a soma “+” na expressão $2 + 3$ já não é mais a mesma que na expressão $2 + x$. O mesmo pode ser dito sobre a relação de igualdade “=”.

E, esse pensamento algébrico operar de forma dedutiva significa que, em seu movimento, ele deduz proposições, ele passa *dedutivamente* de um predicado $P(x)$ para um predicado $Q(x)$. Isto constitui um de seus pontos fortes mais importantes, por exemplo, como sabemos que a equação $P(x)$ tem, no máximo, duas soluções dadas pela seguinte fórmula $Q(x)$?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Não porque nós adivinhamos, mas porque *deduzimos*. Esta ideia de analiticidade, como o movimento que vai do dado (a equação $ax^2 + bx + c = 0$) ao procurado (suas soluções) era chamado, pelo antigo matemático grego Pappus, de *análise* (RIDEOUT, 2008).

Há duas consequências que decorrem das considerações acima, as quais discuto a seguir.

Duas consequências

1. O uso de simbolismo alfanumérico não caracteriza o pensamento algébrico

Nossa concepção do pensamento algébrico difere das correntes contemporâneas que assimilam o pensamento algébrico ao pensamento simbólico alfanumérico. Por exemplo, considera-se frequentemente que a solução para a equação $2x + 2 = 10$ automatica-

mente requer raciocínio algébrico, já que a equação envolve o uso de letras, independentemente das especificidades do raciocínio seguido pelo estudante. No entanto, como temos notado muitas vezes em nossas pesquisas nas escolas, os estudantes muitas vezes procedem por tentativa e erro: eles substituem o valor de x por 1, depois por 2, e assim por diante, até encontrar o valor $x = 4$ que torna a igualdade verdadeira. Este método de tentativa e erro satisfaz a primeira e a segunda condição de nossa caracterização do pensamento algébrico, mas não satisfaz a terceira condição: o raciocínio seguido não é dedutivo. Dentro de nossa caracterização do pensamento algébrico, esta forma de pensar e resolver o problema não é algébrica: é *aritmética*. O uso de letras não é exclusivo do pensamento algébrico. Historicamente falando, o nascimento da álgebra não é o nascimento de seu simbolismo moderno. Em seus *Elementos*, Euclides recorreu a letras sem mobilizar ideias algébricas (UNGURU, 1975). Os antigos matemáticos chineses mobilizaram ideias algébricas para resolver sistemas de equações *sem utilizar o simbolismo alfanumérico*. Em um artigo anterior eu mencionei: “o uso de letras em álgebra não é uma condição necessária nem suficiente para pensar algebricamente” (RADFORD, 2014, p. 260).

2. A álgebra não é uma aritmética generalizada

Nossa concepção de pensamento algébrico também difere daqueles que veem na álgebra uma aritmética generalizada. É evidente que existe uma importante relação entre o pensamento aritmético e algébrico. É claro também que parte desta relação pode ser entendida em termos de generalizações, mas me parece que não é possível extrair toda a álgebra escolar da aritmética. Há, em certos pontos, *rupturas epistemológicas*. O trabalho pioneiro de Filloy e Rojano (1989) descreve precisamente uma dessas rupturas que eles chamaram de *corte didático*. Este corte foi observado em estudos clínicos nos quais os estudantes foram confrontados com equações da forma $Ax + B = Cx + D$. Para resolver equações desta forma, os métodos aritméticos de “inversão de operações” – que são eficazes para resolver equações do tipo $Ax + B = D$ (os

estudantes geralmente subtraem B de D e dividem por A) – não são mais aplicáveis. Os estudantes têm que recorrer a uma ideia verdadeiramente algébrica: operar *dedutivamente* sobre a incógnita. Para operar sobre a incógnita, ou sobre grandezas indeterminadas em geral (por exemplo, variáveis ou parâmetros), é preciso pensar analiticamente. Ou seja, deve-se considerar as quantidades indeterminadas como se fossem algo conhecido, como se fossem números concretos (ver, por exemplo, Kieran, 1989; 1990; Filloy, Rojano e Puig, 2007). Do ponto de vista genético, esta maneira de pensar analiticamente – onde números desconhecidos são tratados da mesma forma que números conhecidos – distingue a aritmética da álgebra. E isto é tão característico da álgebra que o matemático francês François Viète (um dos fundadores da álgebra simbólica moderna) identificou a álgebra não como uma arte de usar símbolos, mas como uma arte *analítica* (Viète, 1983). Esta maneira analítica de pensar para resolver a equação $Ax + B = Cx + D$ não é o resultado de uma generalização da forma de resolver a equação $Ax + B = D$ por inversão de constantes ou por tentativa e erro. A forma *analítica* de pensar sobre a resolução da equação $Ax + B = Cx + D$ requer uma ruptura epistemológica em relação ao pensamento aritmético no sentido em que o pensamento algébrico opera sobre/com as incógnitas e se considera a igualdade sob um novo olhar: um olhar *relacional*.

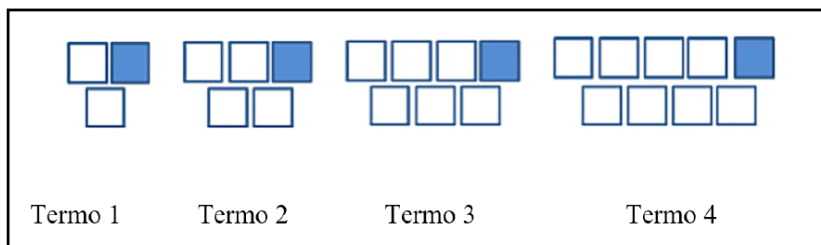
Nas seções seguintes, ilustro o pensamento algébrico em dois domínios matemáticos: equações e *generalização de padrões* (*pattern generalization*).

Generalização de sequências

A generalização de sequências é um dos contextos que tem sido mais cuidadosamente explorados nas investigações no campo da álgebra inicial. Normalmente, se apresenta aos estudantes um número finito de termos de uma sequência figural (ou seja, uma sequência constituída de “figuras” compostas de objetos como círculos ou quadrados) ou numérica (ou seja, uma sequência composta de números) e solicita-se a eles que encontrem o valor dos

termos seguintes, termos remotos e até mesmo o termo geral (o termo n) da sequência. Por exemplo, em uma de nossas primeiras investigações, demos aos estudantes de 7 e 8 anos a sequência mostrada na Figura 1.

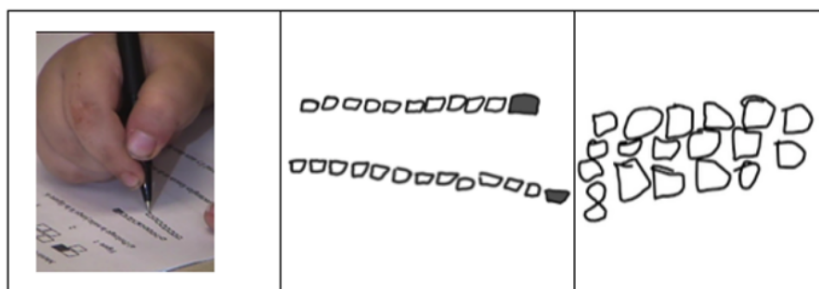
Figura 1 – Os primeiros quatro termos de uma sequência figural



Fonte: Radford (2021b, p. 117)

Foi uma grande surpresa para nós quando os estudantes desenharam os termos 5 e 6, e vimos que eles não o faziam necessariamente respeitando a estrutura espacial. A figura 2 apresenta um exemplo.

Figura 2 – Os termos 5, 6 e 8 da sequência



Fonte: Radford (2021b, p. 118)

Os estudantes se concentram na numerosidade e percebem que entre um termo e o próximo há dois quadrados de diferença. Em outras palavras, eles têm uma relação de “recorrência” na qual, para encontrar o próximo termo, é necessário conhecer o anterior.

Em geral, os jovens estudantes não necessariamente declaram verbalmente a relação de recorrência. A relação de recorrência aparece à consciência através da contagem dos termos e da atividade perceptiva; ou seja, ela aparece à consciência de uma forma corporal. Apesar de interessante, é difícil para os jovens estudantes partir desta relação de recorrência para encontrar o valor de termos remotos, como o termo 25 ou 100, por exemplo. Tal procedimento levaria a transformar uma adição repetida em multiplicação, o que muitas vezes está além do alcance conceitual do jovem estudante.

Uma das generalizações que encontramos frequentemente consiste em dizer que, para obter o valor do termo 25, se faz o seguinte: “3 + 2 + 2 até chegarmos ao fim”. O estudante que diz isto fez uma generalização, mas não é do tipo algébrico, mas do tipo aritmético. Ao responder à pergunta, “quantos quadrados há no termo 4, 5, 6, etc.?”, o estudante percebe que está diante de uma grandeza indeterminada (neste caso, a *variável* “número da posição do termo na sequência” ou “posição do termo”). No entanto, esta variável não chega a ser *denotada* e, portanto, não satisfaz a segunda condição que demos do pensamento algébrico.

Vejamos outro exemplo. Para obter o valor de um termo remoto (por exemplo, termo 25), alguns estudantes fazem a seguinte adição: $9 + 2 = 51$. Partem do valor do termo 4 (que é 9) e somam 2 (dois) vinte e uma vezes, ou seja, tantas vezes quanto a diferença entre a posição do termo pesquisado (termo 25) e o termo 4 ($25 - 4 = 21$). É essa uma generalização que podemos chamar de algébrica? O primeiro critério é satisfeito, mas o segundo não é: os estudantes introduzem uma variável “auxiliar”: a variável “número de vezes que se soma 2”, mas aparece mais como um *artifício heurístico*; esta nova variável não consegue ser *denotada*. Não estamos, portanto, diante de uma generalização algébrica, mas de uma generalização aritmética muito sofisticada. Se, ao contrário, os estudantes dissessem algo como “adicione 2(dois) tantas vezes quanto a posição do termo que você está procurando, menos 4”, a denotação da nova variável auxiliar seria realizada. No caso de estudantes mais avançados, a denotação

poderia ser escrita como $(n - 4) \times 2$; assim, na expressão que dá o valor do termo procurado, surgiria uma *covariação* entre o valor do referido termo e sua posição.

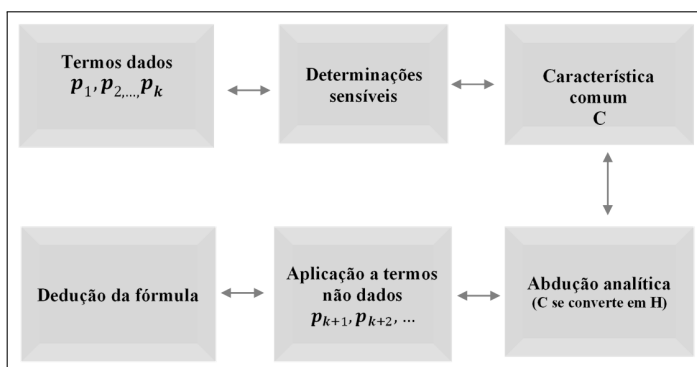
Em outros casos, vimos estudantes tirarem proveito da *forma da figura* para obter a generalização algébrica. Por exemplo, Radford (2013; 2021b) destaca o labor conjunto entre uma professora e um grupo de estudantes que os leva ao fato de que os termos *podem* ser percebidos como se formassem duas filas, a de cima e a de baixo. Esta aproximação do problema leva à identificação de duas relações funcionais ou relações de covariação entre as variáveis: por um lado, entre “a posição do termo” e “o número de quadrados na linha inferior”; por outro lado, entre “a posição do termo” e “o número de quadrados na linha superior”. Com a ajuda da professora, os estudantes tomam consciência que o número de quadrados na linha inferior de qualquer termo é o mesmo que o número (ou posição) do termo, ou seja, da relação que em símbolos escreveríamos como $n \mapsto n$. No caso da linha superior, os estudantes se dão conta de que nessa linha há mais um do que o número do termo, ou seja, da relação que escreveríamos em símbolos como $n \mapsto n + 1$. Em outras palavras, os estudantes tomam consciência das relações $n \mapsto n$, $n \mapsto n + 1$ que levam à relação funcional $n \mapsto 2n + 1$.

Em Radford (2013) eu propus o seguinte modelo para generalização da sequência (Figura 3).

Os estudantes começam escolhendo de forma perceptiva e conceitual: entre tudo o que aparece no campo perceptual dos estudantes, certos elementos são escolhidos. Desta escolha resulta o que eu chamo de “determinações sensíveis”, por exemplo, deter-se na *relação de recorrência* entre termos consecutivos ou deter-se nas *linhas* dos termos, são duas determinações sensíveis diferentes; são duas formas diferentes de ver os termos da sequência. No primeiro caso, a atenção está voltada para as quantidades; no segundo, a atenção está voltada para a forma dos termos. O resultado dessas determinações é uma *característica comum* percebida a partir de um número finito de termos. Em seguida, esta característica “comum” é *generalizada* aos outros termos da sequência. A

generalização da característica comum (que pode ser uma ou várias) corresponde ao que Peirce chamou de *abdução* (*abduction*), ou seja, algo que só é plausível (PEIRCE, 1958, CP 2.270). Segundo o uso desta abdução, a generalização poderá tomar vários cursos. Quando a abdução é usada simplesmente para passar de um termo para o outro (como quando os estudantes dizem que devemos acrescentar 2 quadrados), chegamos a uma generalização aritmética. Neste caso, não há *dedução* de uma expressão direta que nos permita calcular o número de quadrados em qualquer termo da sequência. A abdução nos permite gerar um procedimento, mas não uma expressão direta, em outras palavras, uma *fórmula*.

Figura 3 – Estrutura da generalização algébrica das sequências



Fonte: Radford (2013, p. 7)

No caso do procedimento por tentativa e erro, os estudantes produzem uma fórmula. Mas a fórmula não é deduzida. De fato, a abdução diz respeito à própria fórmula. Os estudantes propõem uma fórmula, que parece plausível, e a submetem a um número finito de provas. Esta generalização (que corresponde a uma das formas de indução) não é, todavia, algébrica; para que seja algébrica, é necessário, de acordo com o que foi dito, que a abdução que se faz da característica comum seja utilizada de forma analítica. Isto significa que a abdução não será mais utilizada como uma simples possibilidade, mas como um princípio assumido para *deduzir* uma fórmula que proporciona o valor de qualquer termo (RADFORD, 2013).

Três estratos de generalização algébrica

Um estudo dos meios semióticos da objetivação utilizados pelos estudantes nos permite distinguir três níveis ou estratos de generalização algébrica². No primeiro, a fórmula do termo geral ou de termos remotos não se baseia em signos alfanuméricos; a fórmula aparece em ações que são executadas sobre números concretos. As variáveis funcionais aparecem por meio de alguns de seus valores, através dos quais a generalidade é expressa. Este é o tipo factual de generalização, no sentido de que o geral se expressa através do singular (*a fact, no inglês*). Um exemplo: “O valor do termo 10 é 10 mais 10 mais 1”; “O valor do termo 25 é 25 mais 25 mais 1”, etc. A generalização factual é uma generalização de ações na forma de um arquétipo operacional: uma fórmula. A fórmula permanece ligada ao nível concreto (por exemplo, “10 mais 10 mais 1”) e permite que os estudantes abordem com sucesso praticamente qualquer caso *particular*.

Outro tipo de generalização algébrica é a generalização *contextual*. Neste caso, os estudantes apoiam seu raciocínio em índices contextuais. Por exemplo, quando os estudantes abordaram a pergunta na qual tinham que explicar a um estudante de outra classe como saber quantos quadrados tem o termo 15 sem desenhar o termo, vários estudantes disseram “15 embaixo e 16 em cima”. Na generalização contextual, os índices contextuais (como *li-nha de baixo* ou *linha de cima*) organizam implicitamente a fórmula; ao invés de números específicos, os índices contextuais são mencionados explicitamente, e se alcança um nível de generalidade diferente do nível da generalização factual.

Na generalização *simbólica*, as variáveis são expressas através de símbolos arbitrários (alfanuméricos, por exemplo, embora não necessariamente). Por exemplo, o valor do termo geral pode ser expresso como “ $___ + ___ + 1$ ” ou “ $2 \times ___ + 1 = ___$ ” (ver

²Os meios semióticos de objetivação são aqueles recursos através dos quais os estudantes tomam consciência dos significados matemáticos-culturais em jogo; tais meios semióticos incluem a linguagem e sua prosódia e signos em geral, assim como artefatos e a atividade material realizada com eles e a atividade corporal, por exemplo, a atividade perceptual, os gestos e as ações.

Radford, 2012) ou $2n + 1$ Note que há uma grande diferença entre a primeira expressão e as outras duas. No primeiro, o primeiro signo “_____” opera *indexicalmente*: aponta para a linha inferior e o segundo signo “_____” aponta para a linha superior (é por isso que dizemos que opera *indexicalmente*). Nas outras duas, as linhas são abstraídas e o signo deixa de ser um *índice* ou *index* para ser um *símbolo propriamente dito*. Na verdade, um passo importante no desenvolvimento ontogenético do pensamento algébrico do estudante será esta passagem da denotação como índice para a denotação como símbolo sem amarras contextuais.

Equações

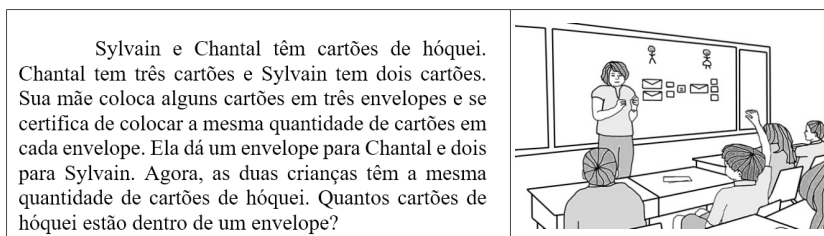
Do meu ponto de vista, as equações ainda não atraíram o interesse que merecem na álgebra inicial e ainda há muito a aprender. Nesta seção, meu objetivo é apresentar alguns trechos de uma atividade de ensino-aprendizagem (labor conjunto) que ilustram certos aspectos de como os estudantes encontram uma forma histórico-cultural de pensar as equações. A atividade de ensino-aprendizagem que vou discutir ocorre em uma aula do quinto ano (estudantes de 10 e 11 anos de idade). É uma classe com a qual temos trabalhado há 4 anos como parte de um programa de pesquisa longitudinal. Nos anos anteriores, os estudantes tinham progressivamente encontrado a forma algébrica de pensar equações através de dois sistemas semióticos elementares:

- (a) o “sistema semiótico concreto” (SSC), constituído por objetos materiais: *envelopes* de papel contendo cada um o mesmo número desconhecido de cartões de papelão, *cartões* de papelão, e o *sinal de igual* (por exemplo, ver Figura 4, à direita), e
- (b) o “sistema semiótico icônico” (SSI), que substitui objetos concretos por imagens icônicas desenhadas { , , = } (para um exemplo, ver figura 5, imagem 1).

No segundo e no terceiro anos, com a ajuda primeiro do SSC e depois do SSI e de um trabalho conjunto com a professora –

orientado por formas coletivas de produção de saberes e uma ética comunitária - os estudantes se familiarizaram com a tradução de problemas simples apresentados em linguagem natural para serem resolvidos por meios algébricos. O primeiro contato com as equações é descrito em Radford (2017), numa passagem em que a professora discute o seguinte problema com os estudantes (eles estavam então no segundo ano, quando tinham 7 e 8 anos de idade):

Figura 4 – *Esquerda: o problema a ser resolvido. Direita: o professor discute com os estudantes.*

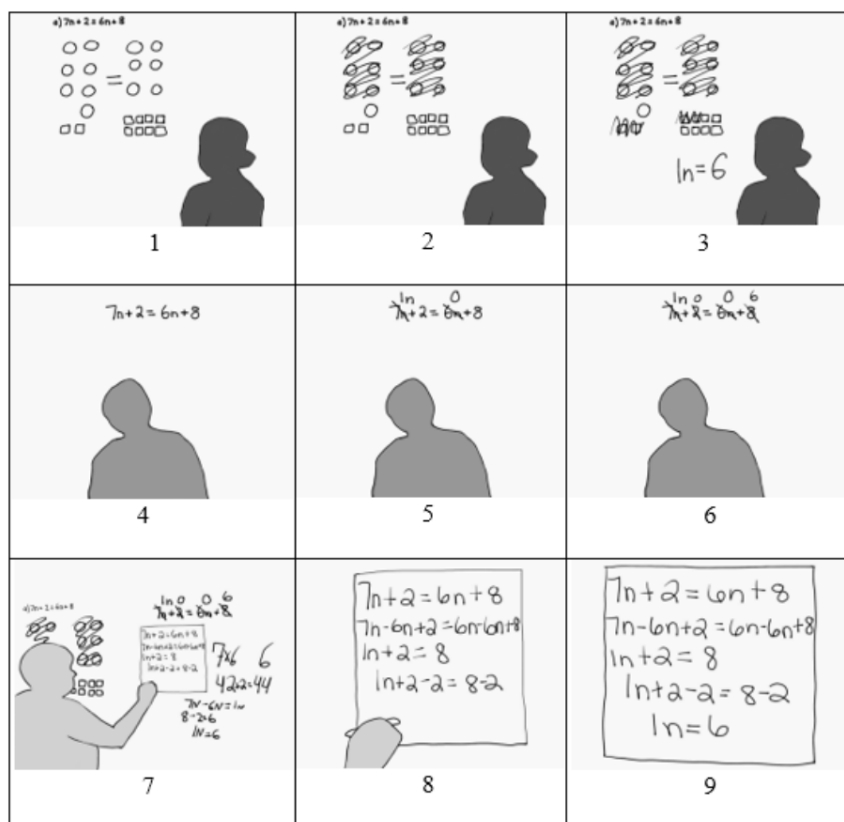


Fonte: Radford (2017)

Em discussão com a professora, os estudantes tomam consciência de que o problema pode ser traduzido no SSC como mostrado na figura 4 à direita (os envelopes, os cartões e cartão de sinal de igual foram colados no quadro). Embora no início os estudantes usem procedimentos de tentativa e erro, atribuindo números de cartões aos envelopes, eles logo se dão conta de que podem remover um envelope de cada lado da equação e que também podem remover dois cartões de cada lado da equação, conseguindo assim “isolar um envelope”, mantendo a igualdade. Esta forma de pensar e de proceder satisfaz as condições enunciadas sobre o pensamento algébrico: a) a indeterminação aparece no número desconhecido de cartões no envelope (é a *incógnita*); b) a incógnita ou grandeza indeterminada é *denotada* pelo envelope dentro do sistema SSC e c) o resultado é *deduzido*: em cada envelope há um cartão.

No quarto ano, o sistema alfanumérico semiótico (SSA) começou a ser utilizado. A professora (que era diferente a cada ano) e os estudantes trabalharam na articulação iniciada no ano anterior entre os sistemas semióticos SSI e SSA, resolvendo os mesmos problemas tanto no SSI quanto no SSA. No quinto ano, o objetivo era que os estudantes se familiarizassem com o SSA e fossem capazes de colocar e resolver equações abstratas (isto é, sem contexto) dentro desse sistema semiótico. De acordo com as diretrizes da teoria da objetivação, durante as lições, a natureza *coletiva* da aprendizagem foi fomentada através trabalhos em pequenos grupos, discussões entre grupos e discussões gerais. Na Figura 5, vemos momentos de uma discussão coletiva em que os estudantes vão até o quadro e têm a oportunidade de trocar ideias sobre os caminhos tomados nas soluções de equações postas em uma tarefa que fizeram individualmente, em casa, na noite anterior. A Figura 5 mostra três métodos de resolução da equação.

Na primeira fila, vemos a primeira solução. Primeiro, a estudante traduz a equação $7n + 2 = 6n + 8$ do SSA para o SSI. A estudante desenha o lado esquerdo da equação: 7 círculos (representando os 7 envelopes) e dois retângulos (representando os dois cartões); depois desenha o lado direito da equação: 6 envelopes (os 6 círculos) e 8 cartões (os 8 retângulos) (ver esboço 1). Em seguida, ela elimina 6 envelopes de cada lado da equação (ver esboço 2); em seguida, ela elimina dois cartões de cada lado da equação e conclui, dedutiva ou analiticamente, que $1n = 6$ (ver esboço 3). Na linha do meio da Figura 5, você vê a solução de um estudante. A solução não recorre ao SSI; ela é realizada no SSA. Ele primeiro escreve a equação (ver esboço 4); depois, remove $6n$ de cada lado da equação (e o indica com uma diagonal nos termos $7n$ e $6n$) e coloca a resposta *em cima dos* termos na equação original (ver esboço 5). Em seguida, subtrai dois de cada lado da equação (risca os termos afetados com uma diagonal) e coloca as *respostas* em cima, mostrando que $1n = 6$ (veja o esboço 6).

Figura 5 – Discussão geral no quadro sobre a solução de $7n + 2 = 6n + 8$ 

Fonte: Elaboração do autor

Evidentemente, é pouco factível que os estudantes reinventem a sintaxe algébrica. A professora aproveita então para mostrar *outra* forma de escrever e raciocinar os cálculos, que ela chama de “o longo caminho”, pois deixa os traços dos cálculos passo a passo em linhas *diferentes* organizadas *de cima para baixo*. Na figura 5 (esboço 7), vemos, de fato, que a professora escreve a equação na primeira linha; depois, na segunda linha, ela escreve $7n - 6n + 2 = 6n - 6n + 8$, explica verbalmente que ela subtraiu $6n$ de cada lado da equação. Na terceira linha, ela escreve os resultados: escreve $1n + 2 = 8$. Em seguida, na quarta linha, ela subtrai 2 de cada lado da equação, e escreve: $1n + 2 - 2 = 8 - 2$. A última linha

do esboço 7 mostra o momento em que a professora realiza as operações, o que daria $1n = 6$. Esboço 8 apresenta um zoom dos cálculos da professora. O esboço 9 mostra todos os cálculos.

Cabe destacar que a professora escreve seu procedimento *sem* apagar o dos estudantes, porque o procedimento da professora não tem essa intenção; trata-se de oferecer aos estudantes *uma outra* forma de pensar a sintaxe algébrica. De fato, houve estudantes que seguiram a maneira longa, enquanto outros seguiram outros caminhos. O que precisa ser entendido é que, na teoria da objetivação, o espaço de discussão coletiva não é um lugar para os estudantes ou a professora exibirem suas proezas. É um local de crescimento *coletivo*, de produzir um *trabalho comum*, de compartilhar maneiras de pensar procedimentos para resolver o problema apresentado e de assegurar que os estudantes se envolvam genuinamente com as ideias uns dos outros, ou seja, que eles se envolvam com essas ideias de forma responsável, compreendendo-as, discutindo-as, contestando-as ou refinando-as, por exemplo.

Após a discussão geral, os estudantes continuaram a trabalhar em pequenos grupos na questão seguinte que haviam explorado no dia anterior:

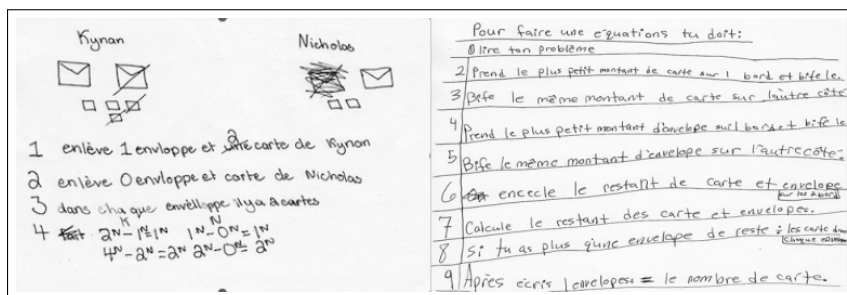
Vocês escreverão um texto que explique os passos para resolver uma equação como as que vimos anteriormente. O texto é dirigido a um estudante do 5o ano de outra escola e não se sabe se este estudante sabe como resolver equações. Sua explicação deve ser clara, correta e convincente:

- a. Clara: você entende o que é dito no texto?
- b. Justa: é a resposta certa?
- c. Convincente: os argumentos no texto são realmente convincentes?

A intenção desta pergunta é fazer com que os estudantes reflitam de maneira *explícita*. Como na teoria da objetivação definimos a aprendizagem como *tomada de consciência*, esta reflexão é importante para garantir uma tomada de consciência conceitualmente

profunda. José, que havia trabalhado no dia anterior com outro grupo, juntou-se ao grupo de Elisa, Celeste e Carina naquela manhã. A discussão girou em torno do que o texto deveria incluir. José sugeriu basear a explicação em um exemplo concreto (Figura 6, à esquerda). Em termos epistemológicos, José explica o *geral através de um singular*. O grupo de Elisa havia seguido uma explicação *geral*, sem exemplos (Figura 6, à direita). Neste exemplo, não há números, apenas referências às ações.

Figura 6 – Esquerda: texto de José. Direita: o texto do grupo da Elisa



Fonte: Elaboração do autor

O texto de Jose diz:

1. Remova 1 envelope e 2 cartões da Kynan
2. Remover 0 envelope e cartão de Nicholas
3. Em cada envelope há 2 cartões.

Seguem-se cálculos entre grandezas desconhecidas e conhecidas.

O texto do grupo da Elisa diz:

Para fazer [resolver] uma equação você deve:

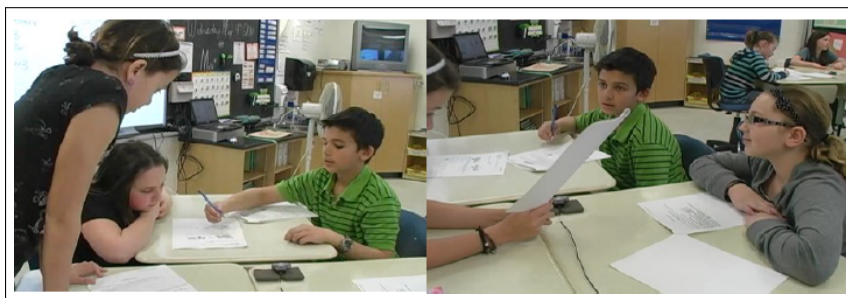
1. Leia o problema.
2. Pegue o menor número de cartões de um lado [da equação] e risque-o .
3. Risque a mesma quantidade de cartões do outro lado.
4. Pegue o menor número de envelopes de um lado e risque-o
5. Risque o mesmo número de envelopes do outro lado.
6. Circule os cartões e envelopes restantes de ambos os lados.
7. Calcule [conte] os cartões e envelopes restantes.
8. Se você tiver mais de um envelope, $\div$ [igualmente] cartões em cada envelope.
9. Em seguida, escreva 1 envelope = número de cartões.

Começa uma discussão matemática bastante intensa.

1. *Elisa: (Dirigindo-se a José)* Nosso [texto] é melhor; não precisa ser específico para um problema.
2. *José: (defendendo-se)* Parece-me que a sua [também] é específica.... Como (referindo-se ao texto de Elisa), "riscar a mesma coisa", é específico! (ver figura 7, à esquerda)
3. *Elisa:* Sim, [mas] "riscar o mesmo" não é específico para um problema; [em nosso procedimento] é como fazer *todos os problemas juntos*...!
4. *José:* Eu, eu dou um exemplo, como...
5. *Celeste: (aprecia a ideia de José)* talvez devêssemos fazer um pequeno desenho no final [do texto], não tenho mais muito espaço, mas poderia fazê-lo abaixo....

6. *José*: sim, ao retirar um envelope e dois cartões da Kynan ...
7. *Celeste*: mas o problema é que [no] seu [texto]... é que você coloca nomes de pessoas sobre as quais não sabemos nada; como quem é Kynan? De onde veio Kynan? (ver Figura 7, à direita).³

Figura 7 – Os alunos contrastam dois textos matemáticos de generalidade diferente



Fonte: Elaboração do autor

Este pequeno episódio nos apresenta estudantes engajados em um processo de objetivação e subjetivação. O processo de objetivação aparece na forma como os estudantes tomam consciência do que deve ser um texto matemático (um texto algébrico, neste caso). A questão é: deve ser dado um exemplo ou deve enunciar de forma geral as etapas de resolução de uma equação? Nas três primeiras etapas, os estudantes se referem a esta diferença por: “específico versus não específico”. No início, o significado não é claro. No final da linha 3, Elisa diz que o procedimento que as meninas propõem, “é como fazer *todos os problemas juntos...*!” Elisa coloca o problema do texto como um problema de generalidade. Mas junto com este processo de objetivação, ocorre um processo

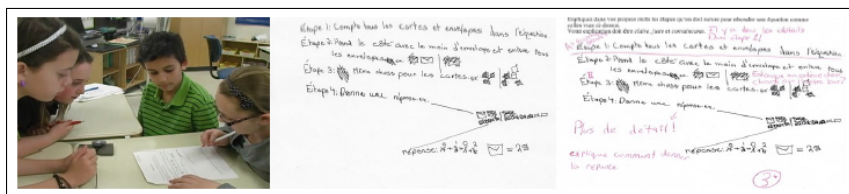
³Como podemos ver, na discussão, os estudantes não chegam a analisar o exemplo proposto por José. Uma análise teria mostrado que a equação proposta não tem solução no conjunto dos números inteiros positivos. A atenção dos estudantes permanece sobre o que podemos chamar de valor epistemológico do exemplo.

de subjetivação: de fato, os quatro estudantes tomam uma posição com respeito ao saber e respeito aos outros. Em suas respostas, Jose explica e defende seu ponto de vista. As meninas o escutam atentamente e o compreendem, mas também se opõem a ele. A Celeste reconhece que a ideia de José poderia ser incorporada ao texto que as meninas desenvolveram. Esta ideia que emerge pouco a pouco é parte do trabalho comum, o trabalho de várias vozes e perspectivas.

A lição continua. Juntos, os quatro estudantes, a partir do texto de Elisa, Carina e Celeste, escrevem um texto que responde à pergunta colocada na tarefa. Então, encorajados pela professora, eles trocam o texto com os estudantes de outro grupo para aprender e se posicionar criticamente diante do texto dos outros.

Na figura 8 (esquerda), vemos os estudantes do grupo da Elisa estudando cuidadosamente o texto do outro grupo (ver figura 8, meio). O grupo de Elisa se surpreende ao ver que a folha do outro grupo tem poucos passos. Celeste diz: “Só têm 4 passos; acho que pode ser um pouco mais longo...” Elisa diz: “Eu não entendo”. José, que se sente à vontade com um texto ilustrado com um exemplo, acrescenta: “Eles deram um exemplo! Se a pessoa [o estudante do 5o ano] ler o exemplo, ela entenderá o sentido”. Os estudantes decidem escrever uma crítica, revezando-se.

Figura 8 – O grupo de Elisa lê de forma crítica o texto do outro grupo



Fonte: Elaboração do autor

1. Celeste: Eu diria que [faltam] mais detalhes.
2. Carina: (lê o passo 2 do texto) pegue o lado [da equação] com o menos envelopes e retire todos os envelopes.

3. *Elisa*: E quanto ao outro lado da equação? Isso não diz que você tem que tirar (*José intervém dizendo a mesma coisa*) a mesma quantidade do outro lado!

A crítica é apontada na cópia do outro grupo (ver Figura 8, à direita).

Enquanto isso, o outro grupo faz uma leitura crítica do grupo da Elisa. Em seguida, os dois grupos se encontram e, por sua vez, apresentam suas sugestões e críticas (ver Figura 9).

Entre as críticas oferecidas pelo grupo de Elisa ao outro grupo (o grupo de Walton e David) está o fato de não indicarem que as operações devem ser realizadas nos dois lados da equação, e que a obtenção da resposta não é clara:

1. *Walton*: retiramos 3 cartões aqui (*aponta para a passagem em sua folha; ver figura 9, à esquerda*).
2. *Carina*: você deveria ter dito “e também 3 cartões do outro [lado]”.
3. *Celeste*: “dê a resposta”.
4. *Elisa*: Como você dá a resposta? (*ver Figura 9, à direita*).
5. *Carina*: Como? Que resposta?

Figura 9 – A discussão entre os dois grupos de estudantes



Fonte: Elaboração do autor

Como vemos, o exame crítico do texto do outro grupo, assim como a discussão entre os grupos, é a ocasião para aprender mais *juntos*. Nesta parte da atividade de ensino-aprendizagem, como na primeira (linhas 1–7), ocorrem outros processos de objetivação e subjetivação que aprofundam a aprendizagem.

Síntese

Na primeira parte deste capítulo, apresentei a concepção do pensamento algébrico na teoria da objetivação e fiz um esboço de alguns dos resultados que alcançamos em nossas pesquisas sobre a generalização de sequências. A segunda parte girou em torno do ensino-aprendizagem das equações. Os episódios discutidos nos permitem ilustrar o que queremos dizer com aprendizagem como um *encontro coletivo* com a matemática.

Primeiro, a matemática é revelada à consciência dos estudantes não como um simples saber externo, formal, mas como uma *possibilidade cultural* que *se materializa* ou *encarna* em um conteúdo concreto multifacetado nesse movimento sensível e sensorial que lhe dá vida e que não é nem mais nem menos do que a atividade de ensino-aprendizagem. Nesta atividade de ensino-aprendizagem tanto estudantes quanto professores aprendem uns com os outros, e a matemática se revela em sua própria lógica polivalente; por exemplo, pensar a idealidade matemática através de exemplos precisos como José, através de sua generalidade discursiva, como sugere o grupo de Elisa, ou como uma combinação de ambos, como fazem David e Walton. Em segundo lugar, se trata de um encontro que oferece a possibilidade de entrar em contato com outras vozes e perspectivas, não para benefício pessoal, mas para a criação de uma obra (uma ideia) comum. Se trata de um encontro com outras vozes e perspectivas através do qual os estudantes e a professora se implicam em comparações, distinções e tomadas de posição com respeito ao saber, o qual gera novas ideias ao longo do caminho, enquanto todos se constituem como subjetividades.

Agradecimentos

Este capítulo é o resultado de um programa de pesquisa financiado pelo *Social Sciences and Humanities Research Council of Canada/Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada* (SSHRC/CRSH).

Referências

DAVYDOV, V. V. Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In: STEFFE, L. (Org.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* Stanford, CA: School Mathematics Study Group, v. 7, p. 55-107, 1975a.

DAVYDOV, V. V. The psychological characteristics of the "pre-numerical" period of mathematical instruction. In: STEFFE, L. (Org.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, Stanford, CA: School Mathematics Study Group. v. 7, p. 109-205, 1975b.

FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, v. 2, p.19-25, 1989.

FILLOY, E., ROJANO, T.; PUIG, L. *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. New York: Springer Verlag, 2007.

IVASHOVA, O. The history and the present state of elementary mathematical education in Russia. In: KARP, A.; VOGELI, B. (Orgs.), *Russian mathematics education. Programs and practices*. New York: World Scientific, p. 37-80, 2011.

KIERAN, C. A perspective on algebraic thinking. In: VERGNAUD, G., ROGALSKI, J.; ARTIGUE, M. (Orgs.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Paris: PME. v. 2, p. 163-171, 1989.

KIERAN, C. A procedural-structural perspective on algebra research. In: FURINGHETTI F. (Org.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Assisi, Italy: PME. p. 245-253, 2011.

PANOSSIAN, M., SOUSA, M.; MOURA, M. Conceptual nexuses of algebraic knowledge: A study form the starting point of the historic and the logical movement. *RIPEM*, v. 6, n. 2, p. 36-53, 2016.

PEIRCE, C. S. *CP – Collected Paper*. Cambridge, MA: Harvard University Press. v. I-VIII, 1958.

RADFORD, L. On the development of early algebraic thinking. *PNA*, v. 6, n. 4, p. 117-133, 2012.

RADFORD, L. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, L. et al. (Orgs.), *Investigación en didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Editorial Comares. p. 3-12, 2013.

RADFORD, L. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, v. 26, n. 2, p. 257-277, 2014.

RADFORD, L. La fenomenología del significado. In: SANTOS, C.; VIEIRA M. J; ALVES, F. (Orgs.), *Docência, cognição e aprendizagem: Contextos diversos*. Curitiba: Editora CRV. p. 15-29, 2017.

RADFORD, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In: KIERAN, C. (Org.). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer, p. 3-25, 2018.

RADFORD, L. Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background. *Educational Studies in Mathematics*, v. 106, p. 327-342, 2021a.

RADFORD, L. *The theory of objectification*. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning. Leiden y Boston: Brill/Sense, 2021b.

RIDEOUT, B. *Pappus reborn*. Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity. Master of Arts in History and Philosophy of Science: University of Canterbury, 2008.

VIÈTE, F. *Introduction to the analytic art*. (trad. R. Witmer). New York: Dover, 1983.

UNGURU, S. On the need to rewrite the history of Greek mathematics. *Archive for the History of Exact Sciences*, v. 15, p. 67-114, 1975.